УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, О.А. Рубцова
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, *mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru*

Претендент на третью интегральную теорему о среднем

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko, O.A. Rubtsova
Donetsk National Technical University (DonNTU), Ukraine
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58

A Contender to Be the Third Integral Mean Value Theorem

Л.П. Мироненко, І.В. Петренко, О.О. Рубцова
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Претендент що до третьої інтегральної теореми про середнє

Подобно тому, как формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши о среднем в дифференциальном исчислении, также можно показать, что первая теорема о среднем является частным случаем интегральной теоремы Коши. В работе рассмотрены две формы интегральной теоремы Коши. Первая из них следует непосредственно из дифференциальной формулы Коши о среднем, а вторая является ее обобщением, подобно тому, как существует первая и вторая интегральные теоремы о среднем и их обобщенные варианты.
Ключевые слова: интеграл, теоремы о среднем, обобщенная теорема, среднее значение функции, интегральное среднее.

Two mean value theorems in the integral calculus have been considered in the article. The first theorem is an integral analogue of the Cauchy’s theorem from differential calculus. The second one is a generalization of the Cauchy’s first theorem. These theorems expend our imagination about the function mean value. The mean value concept is a function mean value with respect to the other function. The third integral mean value theorem can be used for estimation of some definite integrals.
Key Words: integral, mean value theorem, generalized theorem, function mean value, integral measure, average value.

У статті розглянуто дві теореми про середнє в інтегральному численні. Перша з них є інтегральним аналогом теореми Коші у диференціальному численні. Друга теорема є узагальненням першої теореми Коші і проводитися з використанням властивостей інтегральної міри. Теореми розширюють поняття про середнє функції. Згідно нашої теорії середнє у загальному сенсі є середнім функції відносно іншої функції. У частковому випадку відносне середнє перетворюється у звичайне середнє. Третя теорема про середнє може бути використана для оцінки визначних інтегралів.
Ключові слова: інтеграл, теорема про середнє, узагальнена теорема, середнє значення функції, інтегральне середнє.

Введение

Напомним, что в классическом курсе математического анализа преимущественно используются две интегральные теоремы о среднем, каждая из которых несет свою практическую ценность и активно используется в различных разделах мате-

матики [1-4]. Эти теоремы, не вдаваясь в подробности, можно кратко записать в виде формул:

1. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\ \xi \in (a,b),$ (T1)

2. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx,\ \xi \in (a,b).$ (T2)

Это обобщенные теоремы о среднем, которые часто записываются при $g(x) = 1$ и называются усеченными формами обобщенных интегральных теорем [1-3].

Как известно, теорема Коши в дифференциальном исчислении относится к так называемым теоремам о среднем в дифференциальном исчислении [1], [2]. Она используется в математическом анализе для доказательства ряда математических положений, в частности, для формулировки и обоснования правила Лопиталя раскрытия неопределенностей при вычислении пределов [3], [4]. Вместе с тем эта теорема является обобщением теоремы Лагранжа, роль которой исключительна, не только в дифференциальном исчислении, но и во всем математическом анализе.

Обратим внимание на то, что интегральный аналог теоремы Лагранжа приводит к первой интегральной теореме о среднем [6]. Поскольку теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа, то следует ожидать, что ее интегральный аналог приведет к одному из вариантов интегральной теоремы о среднем. Мы ее называем претендентом на третью теорему о среднем. Она может быть записана в виде формулы

3. $g(\xi)\int_a^b f(x)q(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)q(x)dx,\ \xi \in (a,b),$ (T3)

Это обобщенная теорема о среднем, а частная теорема получается при $q(x) = 1$

$$g(\xi)\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\ \ \xi \in (a,b). \quad (1)$$

Для доказательства интегральной теоремы Коши (Т3) потребуется понятие и свойства интегральной меры измеримого множества.

Свойства меры μE *измеримого множества* E*:*

1. Неотрицательность: $\mu E \geq 0$.

2. Монотонность: если $E_1 \subset E_2$, то $\mu E_1 < \mu E_2$.

3. Аддитивность: если $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j = 1,2,...,m,$ то $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu E_i$.

Например, если рассматривается определенный интеграл, то интегральная мера $\mu E = d(Q(x)) \equiv Q'(x)dx$, где $Q(x)$ – дифференцируемая функция. В этом случае, первое свойство меры – неотрицательность, не является обязательным. Это свойство является важным для кратных интегралов. Второе свойство меры – монотонность, означает, что функция $Q'(x) = q(x)$ должна сохранять знак на заданном интервале интегрирования (величина $dx > 0$ по определению). Третье свойство меры очевидно и не требует комментария, ибо в однократном интеграле Римана мера по определению аддитивна.

1 Теорема Коши и ее интегральный аналог

Напомним содержание теоремы Коши в дифференциальном исчислении. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интер-

вале (a,b) и $g'(x)\neq 0$ во всех точках интервала (a,b), то существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что имеет место формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ . \qquad (2)$$

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а функция $G(x)$ является первообразной функции $g(x)$ на $[a,b]$, то, учитывая формулу Ньютона-Лейбница $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$, $G(b)-G(a)=\int_a^b g(x)dx$ и $F'(\xi)=f(\xi)$, $G'(\xi)=g(\xi)$, формула (2) примет вид $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$, откуда следует формула (1).

Полученный результат формулируем в виде теоремы.

Интегральная теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и $g(x)\neq 0$ во всех точках интервала (a,b), то существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что имеет место формула (1).

Приведем *строгое доказательство* теоремы. Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда, на отрезке $[a,b]$ определенны функции $F(x)$ и $G(x)$ в виде интегралов с переменными верхними пределами

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx \ \text{ и } \ G(x)=\int_a^x g(x)dx\ , \qquad (3)$$

По теореме об интегралах с переменным верхним пределом [1] функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывно-дифференцируемы на (a,b) и выполняются равенства $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$. Остается применить формулу Коши (2) к функциям $F(x)$ и $G(x)$, и использовать равенства (3) и $F'(\xi)=f(\xi)$, $G'(\xi)=g(\xi)$.

Замечание. Одним из условий дифференциальной теоремы Коши является условие $G'(x)\neq 0$ во всех точках интервале (a,b), а в силу равенства $G'(x)=g(x)$ во всех точках интервал (a,b) выполняется неравенство $g(x)\neq 0$.

Второй способ доказательства. Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int_a^x (f(t)-\lambda g(t))dt$ с неопределенным множителем λ и определим его так, чтобы $\Phi(b)=\Phi(a)$, т.е.

$$\Phi(b)=\int_a^b (f(t)-\lambda g(t))dt=\int_a^b f(t)dt-\lambda\int_a^b g(t)dt,\ \Phi(a)=0\Rightarrow\lambda=\frac{\int_a^b f(t))dt}{\int_a^b g(t))dt}.$$

Для функции $\Phi(x)$ выполнены условия теоремы Ролля 1) она непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) она дифференцируема на интервале (a,b) и 3) $\Phi(b)=\Phi(a)$, поэтому $\exists\xi\in(a,b)$, в которой $\Phi'(\xi)=f(\xi)-\lambda g(\xi)\Rightarrow\ \lambda=f(\xi)/g(\xi)$. Откуда следует формула (1).

Следствие. При $g(x)=1$ на $[a,b]$ имеем частный случай первой теоремы о среднем $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\int_a^b dx=f(\xi)(b-a)$.

При $f(x)=g(x)$ равенство (3) вырождается в тождество.

2 Сравнение первой и третьей теорем о среднем

Может создаться впечатление, что теорема Т3 является следствием первой теоремы Т1, если последнюю применить повторно к функции $g(x)$. Одним из условий теоремы Т1 является требование, чтобы функция $g(x)$ не меняла знак на заданном отрезке $[a,b]$. Если, кроме того, функция $f(x)$ не меняет знак на $[a,b]$, то первую теорему Т1 можно применить к функции $g(x)$. Другими словами, существует точка $\mu \in (a,b)$, такая, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(\mu)\int_a^b f(x)\,dx$. Сравнивая с формулой Т1, получим равенство

$$f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx = g(\mu)\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Это равенство имеет сходство с формулой Коши Т3, но отличается от последней тем, что точки ξ и μ , вообще говоря, различные.

Но это не единственное отличие. Дело в том, что в первой теореме о среднем значение $f(\xi)$ имеет смысл среднего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Среднее значение функции понимается в интегральном смысле $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$ В обобщенном смысле среднее значение определяется как среднее «взвешенное» с весовой функцией $g(x)$, а именно $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. В нашем случае, как видно из равенства (Т3), речь идет только об отношении двух интегралов, и найдется точка на отрезке $[a,b]$, в которой отношение интегралов равно отношению значений подынтегральных функций. Даже, если переписать равенство (Т3) в виде $\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(\xi)(b-a)}{g(\xi)(b-a)}$, то, вообще говоря, $f(\xi)(b-a) \neq \int_a^b f(x)dx$, $g(\xi)(b-a) \neq \int_a^b g(x)dx$ и не являются средними значениями функций $f(x)$ и $g(x)$.

3 Обобщенная интегральная теорема Коши

Теорема. Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$, 2) функция $q(x) \neq 0$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет первообразную $Q(x)$ и 3) функция $q(x)$ не меняет знак на $[a,b]$. Тогда, существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что выполняется равенство (Т3)

Следствие 1. При $q(x) = 1$ на $[a,b]$ имеем частный случай (1) обобщенной теоремы.

Следствие 2. При $q(x) = 1,\ g(x) = C$ имеем первую теорему о среднем $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ в усеченном виде.

Доказательство теоремы проведем как обобщение формулы (1). В интегральной теореме Коши для функций $f(x)$ и $g(x)$ произведем замену интегральной меры dx на меру $\mu E = dQ(x)$. Обоснование такой замены представлено в работах [7], [8]. Заметим, что мера $dQ(x) = Q'(x)dx = q(x)dx$ будет монотонной на отрезке $[a,b]$, если функция $q(x)$ не меняет знак на $[a,b]$. В результате такой замены меры, получим $g(\xi)\int_a^b f(x)dQ(x) = f(\xi)\int_a^b g(x)dQ(x)$. Учитывая, что $dQ(x) = q(x)dx$, получим формулу (Т3).

4 Геометрический и вероятностный смысл третьей теоремы о среднем

Рассмотрим непрерывные функции $f(x)\geq 0$ и $g(x)\geq 0$ на отрезке $[a,b]$. Для простоты, примем $f(x)\geq g(x)$. Обозначим $S_f=\int_a^b f(x)dx$ и $S_g=\int_a^b g(x)dx$ площади криволинейных трапеций, ограниченных графиками функций $f(x)$ и $g(x)$. Согласно интегральной формуле Коши (1) существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что $S_f/S_g=f(\xi)/g(\xi)$ – отношение площадей криволинейных трапеций, ограниченных графиками функций $f(x)$ и $g(x)$, равно отношение $f(\xi)/g(\xi)$; или всегда найдется точка $\xi\in(a,b)$, такая, что отношение площадей криволинейных трапеций равно отношению функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$.

Следует отметить, что значения функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$ не являются средними значениями функций $f(x)$ и на отрезке $[a,b]$. Как уже было отмечено, значения функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$ являются средними значениями функций $f(x)$ и $g(x)$ в том случае, когда одна из них постоянная.

Если функция $q(x)$ имеет смысл плотности (не нормированной) вероятности, то $\overline{f}=\dfrac{\int_a^b f(x)q(x)dx}{\int_a^b q(x)dx}$ является средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда, обобщенная теорема Коши, записанная в форме $\overline{f}/\overline{g}=f(\xi)/g(\xi)$, имеет следующий смысл: всегда найдется точка $\xi\in(a,b)$, в которой отношение средних значений функций $f(x)$ и $g(x)$ на $[a,b]$ равно отношению значений функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ равны в интегральном смысле $\int_a^b f(x)q(x)\ dx=$ $=\int_a^b g(x)q(x)dx$, то существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что $f(\xi)=g(\xi)$.

В частном случае равномерного распределения $q(x)=\dfrac{1}{b-a}$ и $\mathrm{g}(x)=x$

$$\frac{\int_a^b f(x)q(x)dx}{\int_a^b xq(x)dx}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b xdx}=\frac{f(\xi)}{\xi}\Rightarrow\int_a^b f(x)\ dx=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Применим первую теорему о среднем к левой части равенства

$$f(\mu)(b-a)=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{b^2-a^2}{2}\Rightarrow f(\mu)=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{b+a}{2}.$$

где $f(\mu)$ – «истинное» среднее, а $f(\xi)$ – среднее по Коши. Например, если $f(x)$ линейная функция $f(x)=x$, то $\mu=(b+a)/2$. Если $f(x)$ квадратичная функция $f(x)=x^2$, то $\mu=\sqrt{\xi(b+a)/2}$.

В частном случае $g(x)=C=const$, формула (1) переходит в первую обобщенную теорему о среднем и определяет среднее значение функции $f(\xi)$ с ненормированной плотностью распределения вероятности $q(x)$.

Третья теорема о среднем может быть использована для оценки интегралов.

Пример. Оценить интеграл $\int_a^b x^2 e^{-x^2} dx$.

Интеграл не вычисляется в элементарных функциях. Возьмем в качестве $g = x$, а $q = e^{-x^2}$. Тогда третья теорема о среднем имеет вид

$$\frac{\int_a^b x^2 e^{-x^2} dx}{\int_a^b x e^{-x^2} dx} = \frac{\xi^2}{\xi} \Rightarrow \frac{\int_a^b x^2 e^{-x^2} dx}{\left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right)/2} = \xi \Rightarrow \int_a^b x^2 e^{-x^2} dx = \xi \cdot \frac{e^{-a^2} - e^{-b^2}}{2} \;,\; \xi \in (a,b).$$

Отсюда следует оценка $\int_a^b x^2 e^{-x^2} dx \le b \cdot \frac{e^{-a^2} - e^{-b^2}}{2},\; a < b.$

Выводы

В работе рассмотрены две формы интегральной теоремы Коши. Первая из них следует непосредственно из дифференциальной формулы Коши о среднем, а вторая является ее обобщением. Приведены доказательства обоих теорем. Подобно тому, как формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши, также показано, что первая теорема о среднем является частным случаем третьей интегральной теоремы (интегральной теоремы Коши).

Обобщенная теорема Коши доказывается с использованием элементов теории меры и опирается на работы [6-8]. Эффективность подхода заключается в том, что все обобщенные теоремы получены в одной манере и очень просто. Все три теоремы о среднем можно сформулировать и доказать в единой манере.

Геометрический и вероятностный смысл интегральной теоремы Коши имеет самостоятельное значение, отличное от смысла первой и второй теорем о среднем. Это означает, что теорема Коши может рассматриваться в интегральном исчислении как еще одна теорема о среднем. Более того, теорема расширяет понятие среднего.

Следует отметить также, что природа среднего различная во всех трех теоремах. Кратко можно их охарактеризовать так. Первая теорема о среднем является классическим средним, можно сказать является обобщением среднего арифметического, а обобщенная первая теорема о среднем совпадает с вероятностной трактовкой среднего. Вторая теорема о среднем имеет дело со средним с весовыми множителями на границах интервала. Третья теорема является обобщением первой и имеет смысл относительного среднего, точнее, среднее значение функции вычисляется относительно среднего значения другой функции. Только в случае, когда последняя функция равна единице или является постоянной (равномерное распределение случайной величины), то относительное среднее совпадает с абсолютным и тогда совпадает со средним «взвешенным» как в первой теореме о среднем.

Третья теорема о средне позволяет оценивать определенные интегралы, причем аналогичные оценки невозможны с помощью первой и второй теорем. Более того, относительно произвольный выбор функции $g(x)$ позволяет делать оценки интегралов $\int_a^b f(x)dx$ в широком диапазоне, как изменения переменной x, так и изменения функции $f(x)$.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука,1970. – Том I. – 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд-во ФМЛ, Москва, 1956. – Т. 1. – 472 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М. : Наука, Изд-во ФМЛ, 1972. – Т. 2. –795 с.
4. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – Vol 1. – 667 p.
5. Wrede R. Theory and Problems of Advanced Calcolus. – Schaum’s Series / R. Wrede, M. Spiegel. –The MacGraw-Hill Companies Inc., 2002 (First Edition 1966). – 433.
6. Мироненко Л.П. Интегральная форма теоремы Лагранжа и ее применение к определенному интегралу / Л.П. Мироненко, Н.А Прокопенко // Сборник научно-методических работ. – Донецк, 2009. – Вып. 6. – С.119-126.
7. Мироненко Л.П. Интегральные теоремы о среднем. Подход, основанный на свойствах интегральной меры / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, О.А Рубцова // Искусственный интеллект. – 2010. – № 4. – С. 617-622.
8. Мироненко Л.П. Простой способ доказательства теоремы о среднем в интегральном исчислении / Л.П. Мироненко, О.А. Рубцова, Т. Табаленкова // Математическая культура инженера : мат-лы региональной студенческой конференции. – Донецк, 2010. – С. 233-237.

Literatura

1. Kudrjavcev L.D. Matematicheskij analiz. Tom I. M.: Nauka.1970. 571 s.
2. Il’in V.A.Osnovy matematicheskogo analiza. Tom 1. M.: Izd-vo FML. 1956. 472 s.
3. Fihtengol’c G.M. Kurs differencial’nogo i integral’nogo ischislenija. Tom 2. M. : Nauka, Izd-vo FML. 1972. 795 s.
4. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. John Wilay and Sons, Inc. 1966. 667s.
5. Wrede R. Theory and Problems of Advanced Calcolus. Schaum’s Series. The MacGraw-Hill Companies Inc. 2002 (First Edition 1966). 433s.
6. Mironenko L.P. Sbornik nauchno-metodicheskih rabot. Vyp. 6. Doneck. 2009. S.119-126.
7. Mironenko L.P. Iskusstvennyj intellect. № 4. 2010. S. 617-622.
8. Mironenko L.P. Materialy regional’noj studencheskoj konferencii. Matematicheskaja kul’tura inzhenera. Doneck. 2010. S. 233-237.

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko, O.A. Rubtsova

A Contender to Be the Third Integral Mean Value Theorem

Lagrange’s theorem or so called Lagrange’s formula in the differential calculus produces the mean value theorem in the integral calculus. Cauchy’s theorem generalizes the Lagrange’s theorem. These facts point to us that there is an integral analogue of Cauchy’s theorem. We have called it a contender to be the third mean value integral theorem.

Let the functions $F(x)$ and $G(x)$ are primitives of the continuous functions $f(x)$ and $g(x)$ in a segment $[a,b]$. If the function $g(x) \neq 0$ in each point of the $[a,b]$ then there is a point $\xi \in (a,b)$ such that:

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} .$$

This is Cauchy’s theorem. From one hand $F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$ and from the other hand $F'(\xi) = f(\xi)$, then we have the third mean value integral theorem:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \ \xi \in (a,b).$$

Replacing the integral measure dx with the measure $dQ(x) = Q'(x)dx$

where $Q'(x) = q(x) > 0$, we will get a general form of the third mean value integral theorem:

$$\frac{\int_a^b f(x)q(x)dx}{\int_a^b g(x)q(x)dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \ \xi \in (a,b).$$

Lagrange's theorem is a private case of the third mean value integral theorem when $g(x) = const$:

$$\int_a^b f(x)q(x)dx = f(\xi)\int_a^b q(x)dx, \ \xi \in (a,b).$$

At last, at $q(x) = const$ we will get the first mean value integral theorem:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \ \xi \in (a,b).$$

If the function $q(x)$ is the probability density (maybe non-normalized) then

$$\overline{f} = \frac{\int_a^b f(x)q(x)dx}{\int_a^b q(x)dx}$$

is the average value of the function $f(x)$ in the segment $[a,b]$. In this case, Cauchy's theorem, which is written in the form $\overline{f}/\overline{g} = f(\xi)/g(\xi)$, has geometric sense: there is a point $\xi \in (a,b)$ such that the ratio of the average values of the functions $f(x)$ and $g(x)$ in the segment $[a,b]$ is equal to the ratio of the function values: $f(\xi)$ and $g(\xi)$.

The third theorem expands our imagination about the average value. Only when the second function is equal to one or a constant (at the distribution with a constant density) then the relative average value coincides with the absolute value of the average.

The third theorem can be used for estimation of some definite integrals.

Статья поступила в редакцию 06.04.2012.